Listy Biometryczne
Vol. XXIV (1987) No.1
Biometrical Letters

ZASTOSOWANIE TEORII SPRĘŻYNOWYCH UKŁADÓW WAGOWYCH DO ANALIZY DOŚWIADCZEŃ Z MIESZANKAMI

Bronisław CERANKA, Krystyna KATULSKA

Zakład Metod Matematycznych i Statystycznych, Akademia Rolnicza,
Wojska Polskiego 28, 60-637 Poznań,

Instytut Matematyki, Uniwersytet im. A.Mickiewicza,
Matejki 48/49, 60-769 Poznań

Ceranka B., Katulska K., 1987. Application of spring balance weighing designs theory to the analysis of experiments with mixtures of cultivars. Listy Biometryczne XXIV, z.1, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań (Adam Mickiewicz University Press), pp. 17-26. PL ISSN 0458-0036.

The incidence matrices of BIB designs for v treatments have been used to construct spring balance weighing designs for v+1 objects. Conditions under which a spring balance weighing design for v+1 objects is optimal for the estimation of weights of v objects are given. Application of this theory to the analysis of experiments with mixtures of cultivars is considered.

1. WSTĘP

Yates (1933) rozważając doświadczenia czynnikowe bez interakcji sformułował następujące pytanie: Jak przeprowadzić doświadczenie pozwalające na najlepsze oszacowanie ciężarów siedmiu obiektów przy zastosowaniu wagi, która wymaga tarowania?

Intuicyjnie wydawało się, że najlepsze oszacowanie otrzyma się wtedy, gdy dokona się najpierw pomiaru polegającego na odczytaniu odchylenia wskazówki wagi od właściwego zera, a następnie wykona ważenie każdego z siedmiu obiektów oddzielnie i jako estymator ciężaru każdego z obiektów przyjmie się różnicę odczytów na skali wagi, gdy obiekt był umieszczony na szalce i gdy szalka była pusta. Przy założeniu, że nie ma błędów systematycznych, a błędy związane z odczytami są niezależnymi zmiennymi losowymi o wariancji σ^2, wariancja każdego z estymatorów ciężarów

---

Słowa kluczowe: optymalny sprężynowy układ wagowy, układ obiektów, układ zrównoważony o blokach niekompletnych

obiektów uzyskanych metodą opisaną powyżej wynosi $2\sigma^2$.

W doświadczeniach z mieszankami, których celem jest określenie zawartości (udziału) różnych odmian (gatunków) pewnej rośliny (np. rośliny motylkowej) w plonie siana, porównuje się często v odmian tej rośliny, wysiewając nasiona na poletkach doświadczalnych razem z pewnym gatunkiem trawy, przy czym na jednym poletku wysiewa się samą trawę. Jeżeli określona objętość nasion trawy daje po zakończeniu okresu wegetacji taką samą wielkość plonu niezależnie od odmiany, z którą była wysiana to mówimy, że między trawą a poszczególnymi odmianami nie występuje efekt konkurencji. W tym przypadku plon siana z poletka doświadczalnego, na którym wysiano nasiona trawy oraz nasiona i-tej odmiany składa się z masy trawy, masy tej odmiany i masy chwastów. Jest to przykład doświadczenia wagowego zaproponowanego przez Yates'a (1933), w którym odmiany stanowią obiekty a występowanie trawy i chwastów jest interpretowane jako odchylenie wskazówki wagi od właściwego zera. W celu określenia plonu odmiany łącznie z trawą i chwastami stosuje się następujące postępowanie. Z każdego poletka pobiera się próbę (najczęściej o masie 1 kg) i ręcznie rozdziela na trawę, odmianę i chwasty. Na podstawie tego rozdziału ustala się masę rośliny odmiany na danym poletku doświadczalnym przyjmując, że jest ona proporcjonalna do masy rośliny tej odmiany uzyskanej w próbie. Metoda ta jest czasochłonna, obarczona błędami ręcznego rozdzielania i zależna od możliwości percepcyjnych badacza.

Powstaje zatem potrzeba opracowania metody mniej pracochłonnej i eliminującej błędy subiektywne. Proponowana w tej pracy alternatywna metoda estymacji zawartości badanych odmian w plonie siana wykorzystuje teorię sprężynowych układów wagowych i układów zrównoważonych o blokach niekompletnych.

2. PROPONOWANE POSTĘPOWANIE

Proponowaną metodę estymacji zawartości badanych odmian (efektów tych odmian) w plonie siana można stosować, gdy między odmianami nie występuje efekt konkurencji, to znaczy, że określona objętość nasion ustalonej odmiany daje po zakończeniu okresu wegetacji tę samą wielkość plonu niezależnie od odmian roślin rosnących w bezpośrednim sąsiedztwie. Rozważana metoda estymacji opiera się również na założeniu, że między trawą a każdą odmianą nie występuje efekt konkurencji.

Rozważmy na przykładzie procedurę estymacji efektów odmian wykorzystującą teorię układów wagowych i układów blokowych. Przypuśćmy, że badacz zainteresowany jest w określeniu efektów dla $v=7$ odmian, które umownie oznaczymy przez A,B,C,D,E,F i G. Obiektami w doświadczeniu polowym są mieszanki składające się z k ($< v$) odmian i trawy. Mieszanki te powstają w oparciu o tak zwany układ obiektów zdefiniowany przez Federera

(1959) . Proponuje on do określenia układu obiektów wykorzystać macierze incydencji układów zrównoważonych o blokach niekompletnych. W przypadku naszego doświadczenia taką macierzą może być macierz postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{2.1}$$

Wiersze tej macierzy identyfikuje się z mieszankami, przy czym pierwsza kolumna odpowiada trawie (z chwastami) a pozostałe kolumny odpowiadają odmianom A,B,C,D,E,F i G. Macierz (2.1) daje zatem następujące mieszanki (układ obiektów):

obiekt 1 = trawa i odmiany A,B,C,D,E,F,G,

obiekt 2 = trawa i odmiany A,B,D,

obiekt 3 = trawa i odmiany B,C,E,

obiekt 4 = trawa i odmiany C,D,F,

obiekt 5 = trawa i odmiany D,E,G,

obiekt 6 = trawa i odmiany A,E,F,

obiekt 7 = trawa i odmiany B,F,G,

obiekt 8 = trawa i odmiany A,C,G.

Powyższe mieszanki traktujemy jako obiekty w układzie blokowym i rozmieszczamy losowo w układzie bloków kompletnych. Przypuśćmy, że w wyniku przeprowadzenia takiego doświadczenia z $r^* = 3$ blokami, otrzymano następujące średnie masy siana dla kolejnych obiektów (mieszanek) $\bar{y}_1 = 30$, $\bar{y}_2 = 22$, $\bar{y}_3 = 27$, $\bar{y}_4 = 32$, $\bar{y}_5 = 36$, $\bar{y}_6 = 29$, $\bar{y}_7 = 35$, $\bar{y}_8 = 29$, a średnią ogolną $\bar{y} = 30$, (Federer, Hedayat, Love, Raghavarao, 1976).

Na średnią siana każdej z mieszanek składa się średnia masa trawy (z chwastami), średnia masa wszystkich odmian, efekty odmian wchodzących w skład danego obiektu (mieszanki) oraz błąd doświadczalny. Oznaczamy przez L_A, L_B, L_C, L_D, L_E, L_F, i L_G efekty odmian A,B,C,D,E,F,G związane z zawartością tych roślin w sianie. Jako oceny tych efektów uzyskujemy

$$\begin{aligned}
\hat{L}_A &= (30+22-27-32-36+29-35+29)/4 = -5, \\
\hat{L}_B &= (30+22+27-32-36-29+35-29)/4 = -3, \\
\hat{L}_C &= (30-22+27+32-36-29-35+29)/4 = -1, \\
\hat{L}_D &= (30+22-27+32+36-29-35-29)/4 = 0, \\
\hat{L}_E &= (30-22+27-32+36+29-35-29)/4 = 1, \\
\hat{L}_F &= (30-22-27+32-36+29+35-29)/4 = 3, \\
\hat{L}_G &= (30-22-27-32+36-29+35+29)/4 = 5.
\end{aligned}$$

Można pokazać, że wariancja $\hat{L}_i$ jest równa $\sigma^2/6$. Wariancja ta zależy od liczby bloków $r^* = 3$ oraz od układu obiektów to znaczy od wyboru macierzy (2.1). Powstaje zatem pytanie, czy inny dobór macierzy (2.1) pozwoli na estymację L_i z mniejszą wariancją. Zagadnienie wyboru układu obiektów zostanie omówione w dalszej części tej pracy.

3. MODEL STATYSTYCZNY DOŚWIADCZENIA WAGOWEGO

Wyniki n pomiarów p obiektów można opisać modelem liniowym postaci

$$y = Xw + e \quad ,$$

gdzie y jest n-wymiarowym wektorem obserwacji, $w = (w_1, \dots, w_p)'$ jest p-wymiarowym wektorem nieznanych miar obiektów, a e jest n-wymiarowym wektorem błędów losowych, o którym zakładamy, że $E(e) = 0_n$ i $E(ee') = \sigma^2 G$. 0_n oznacza n-wymiarowy wektor złożony z samych zer, a G jest znaną, symetryczną macierzą dodatnio określoną. Macierz X nxp wymiarowa o znanych elementach nazywa się macierzą układu wagowego. Jeżeli elementami tej macierzy są -1, 0, 1, to taki układ wagowy nazywamy chemicznym układem wagowym, natomiast gdy elementy macierzy X są równe 0 i 1 to układ nazywamy sprężynowym układem wagowym.

Układ rownań normalnych dla estymacji miar obiektów można zapisać w postaci

$$X'G^{-1}Xw = X'G^{-1}y \quad . \tag{3.1}$$

Definicja 3.1. Układ wagowy nazywamy układem osobliwym, gdy $X'G^{-1}X$ jest macierzą osobliwą lub nieosobliwym, gdy $X'G^{-1}X$ jest macierzą nieosobliwą.

Ponieważ macierz G jest macierzą dodatnio określoną, to macierz $X'G^{-1}X$ jest macierzą nieosobliwą wtedy i tylko wtedy, gdy X jest macierzą pełnego rzędu kolumnowego. W tym przypadku miara każdego z p obiektów jest estymowalna indywidualnie, a najlepszy liniowy nieobciążony estymator ma postać

$$\hat{w} = (X'G^{-1}X)^{-1}X'G^{-1}y \quad . \tag{3.2}$$

Macierz kowariancji estymatora $\hat{w}$ wynosi wówczas

$$Var(\hat{w}) = \sigma^2(X'G^{-1}X)^{-1} \quad .$$

W szczególności, gdy G jest macierzą postaci aI_n, gdzie I_n oznacza n-wymiarową macierz jednostkową, $a>0$, to

$$Var(\hat{w}) = a\sigma^2(X'X)^{-1} \quad .$$

W dalszej części tej pracy rozważać będziemy przypadek, gdy $G = aI_n$, $a>0$.

Gdy X jest macierzą nieosobliwego chemicznego układu wagowego, to wariancja estymatora miary każdego obiektu jest nie mniejsza niż $a\sigma^2/n$ tzn. $Var(\hat{w}_i) \geq a\sigma^2/n$, $i=1,\dots,p$. Gdy dla każdego $i=1,\dots,p$ $Var(\hat{w}_i) = a\sigma^2/n$, to chemiczny układ wagowy nazywamy układem optymalnym. Zauważmy, że warunek optymalności jest równoważny warunkowi $X'X = nI_p$.

Można pokazać, że dla nieosobliwego sprężynowego układu wagowego równość $X'X = nI_p$ nigdy nie jest spełniona.

W szczególności, gdy w macierzy X nieosobliwego sprężynowego układu wagowego pierwsza kolumna złożona jest z samych jedynek to $\mathrm{Var}(\hat{w}_i) \geq 4a\sigma^2/n$, $i=2,\ldots,p$.

Definicja 3.2. Sprężynowy układ wagowy o macierzy X, w której pierwsza kolumna złożona jest z samych jedynek nazywamy optymalnym, gdy $\mathrm{Cov}(\hat{w}_i,\hat{w}_j) = 0$ dla $i \neq j$ i $\mathrm{Var}(\hat{w}_i) = 4a\sigma^2/n$, $i,j = 2,\ldots,p$, (Moriguti, 1954).

Ponieważ w doświadczeniach z mieszankami najczęściej wykorzystuje się macierze sprężynowych układów wagowych, w których pierwsza kolumna złożona jest z samych jedynek, dlatego w pracy tej zajmiemy się poszukiwaniem takich macierzy X, które określają optymalne sprężynowe układy wagowe.

4. OPTYMALNE SPRĘŻYNOWE UKŁADY WAGOWE

Rozważmy układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami v,b,r,k,λ i macierzy incydencji N.

Niech X będzie macierzą sprężynowego układu wagowego postaci

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1'_v \\ 1_b & N' \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

gdzie 1_c oznacza c-wymiarowy wektor, którego wszystkie składowe są równe jedności. W układzie tym liczba pomiarów $n = b+1$, a liczba obiektów $p = v+1$.

Lemat 4.1. Sprężynowy układ wagowy opisany macierzą X określoną w (4.1) jest układem nieosobliwym.

Dowód. Z (4.1) i definicji macierzy N wynika, że

$$X'X = \begin{bmatrix} b+1 & (r+1)1'_v \\ (r+1)1_v & (r-\lambda)I_v + (\lambda+1)1_v1'_v \end{bmatrix}$$

Ponieważ $b+1>0$ zatem

$$\det(X'X) = (b+1)\det\left((r-\lambda)I_v + \left(\lambda+1-\frac{(r+1)^2}{b+1}\right)1_v1'_v\right)$$
$$= (r-\lambda)^{v-1}(b-r)(v-k)>0 \quad ,$$

co kończy dowód.

Wykorzystując relacje $vr = bk$ i $\lambda(v-1) = r(k-1)$, które zachodzą dla układu zrównoważonego o blokach niekompletnych, otrzymujemy

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{v+rk}{(v-k)(b-r)} & -\frac{r+1}{(v-k)(b-r)}1'_v \\ -\frac{r+1}{(v-k)(b-r)}1_v & \frac{1}{r-\lambda}I_v + \frac{(r+1)^2-(\lambda+1)(b+1)}{(r-\lambda)(v-k)(b-r)}1_v1'_v \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Z wzoru (4.2) wynika, że

$$\mathrm{Var}(\hat{w}_i) = \begin{cases} \frac{a\sigma^2(v+rk)}{(v-k)(b-r)} & i=1 \\ \frac{a\sigma^2}{(r-\lambda)}\left(1 + \frac{(r+1)^2-(\lambda+1)(b+1)}{(v-k)(b-r)}\right) & i=2,\ldots,p, \end{cases} \tag{4.3}$$

a

$$\mathrm{Cov}(\hat{w}_i,\hat{w}_j) = \begin{cases} \frac{-a\sigma^2(r+1)}{(v-k)(b-r)} & i=1,\ j=2,\ldots,p \\ \frac{a\sigma^2((r+1)^2-(\lambda+1)(b+1))}{(r-\lambda)(v-k)(b-r)} & i,j=2,\ldots,p,\ i\neq j. \end{cases} \tag{4.4}$$

W świetle (4.4) i definicji 3.2 łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.1. W sprężynowym układzie wagowym z macierzą układu X, postaci (4.1) estymatory miar dowolnej pary (i,j) obiektów ($i,j=2,\ldots,p$, $i\neq j$) są nieskorelowane wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(r+1)^2 = (\lambda+1)(b+1)\ . \tag{4.5}$$

Z definicji 3.2 optymalności sprężynowego układu wagowego i twierdzenia 4.1 wynika następujący wniosek:

Wniosek 4.1. Sprężynowy układ wagowy z macierzą układu X określoną w (4.1) jest układem optymalnym, gdy spełniony jest warunek (4.5) i

$$b+1 = 4(r-\lambda)\ . \tag{4.6}$$

Powstaje teraz pytanie, czy istnieje macierz X postaci (4.1), będąca macierzą optymalnego sprężynowego układu wagowego. Z wniosku 4.1 wynika, że jest to uzależnione od istnienia układu zrównoważonego o blokach niekompletnych, którego parametry spełniają warunki (4.5) i (4.6). Korzystając z zależności jakie zachodzą między parametrami układu zrównoważonego o blokach niekompletnych można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2. Jeżeli istnieje układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami v,b,r,k,λ, taki, że macierz X określona w (4.1) jest macierzą optymalnego sprężynowego układu wagowego, to parametry układu zrównoważonego o blokach niekompletnych spełniają zależności

$$v = b = 4\lambda + 3 ,$$
$$r = k = 2\lambda + 1 . \qquad (4.7)$$

Dowód: Z warunków (4.5) i (4.6) wynika, że $r = 2\lambda+1$ i $b = 4\lambda+3$. Korzystając z równości $vr = bk$ i $\lambda(v-1) = r(k-1)$ uzyskujemy $v=b$ i $k=r$.

Raghavarao (1971) udowodnił dwa następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4.3. (Raghavarao, 1971, twierdzenia 5.7.4). Jeżeli $4t+3$ jest liczbą pierwszą lub potęgą liczby pierwszej, to istnieje symetryczny układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v = b = 4t+3$, $r = k = 2t+1$, $\lambda = t$.

Twierdzenie 4.4. (Raghavarao, 1971, twierdzenie 5.9.2). Jeżeli istnieje układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami v,b, $r = 2k+1$, k, $\lambda = 1$, to istnieje symetryczny układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami $v^* = b^* = 4k^2-1$, $r^* = k^* = 2k^2-1$, $\lambda^* = k^2-1$.

Parametry symetrycznych układów zrównoważonych o blokach niekompletnych opisane w twierdzeniach 4.3 i 4.4 spełniają warunki (4.7), a zatem układy te mogą stanowić podstawę konstrukcji optymalnego sprężynowego układu wagowego z macierzą X postaci (4.1).

Rozważmy ponownie układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami v,b,r,k,λ i macierzy incydencji X.

Niech X będzie teraz macierzą postaci

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0'_v \\ 1_b & N' \end{bmatrix} . \qquad (4.8)$$

W układzie tym, podobnie jak poprzednio liczba pomiarów $n = b+1$, a liczba obiektów $p = v+1$.

Lemat 4.2. Sprężynowy układ wagowy opisany macierzą X określoną w (4.8) jest układem nieosobliwym.

Dowód. Z (4.8) i definicji macierzy N wynika, że

$$X'X = \begin{bmatrix} b+1 & r1'_v \\ r1_v & (r-\lambda)I_v + \lambda 1_v 1'_v \end{bmatrix} .$$

Ponieważ $b+1>0$ zatem

$$\det(X'X) = (b+1)\det((r-\lambda)I_v + (\lambda - \frac{r^2}{b+1})1_v 1'_v$$
$$= (r-\lambda)^{v-1} rk>0,$$

co kończy dowód lematu.

Z pokazanego lematu wynika, że macierz $X'X$ jest macierzą nieosobliwą, zatem

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{k}1'_v \\ -\frac{1}{k}1_v & \frac{1}{r-\lambda}I_v + \frac{r^2-\lambda(b+1)}{rk(r-\lambda)}1_v1'_v \end{bmatrix} . \qquad (4.9)$$

Z wzoru (4.9) wynika, że

$$\mathrm{Var}(\hat{w}_i) = \begin{cases} a\sigma^2 & i=1 , \\ \frac{a\sigma^2}{r-\lambda}\left(1 + \frac{r^2-\lambda(b+1)}{rk}\right) & i=2,\dots,p , \end{cases} \qquad (4.10)$$

a

$$\mathrm{Cov}(\hat{w}_i,\hat{w}_j) = \begin{cases} \frac{-a\sigma^2}{k} & i=1, \quad j=2,\dots,p , \\ \frac{a\sigma^2(r^2-\lambda(b+1))}{rk(r-\lambda)} & i,j=2,\dots,p , \quad i\neq j. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Na podstawie (4.11) i definicji 3.2 łatwo udowodnić twierdzenie:

Twierdzenie 4.5. W sprężynowym układzie wagowym z macierzą układu X postaci (4.8) estymatory miar dowolnej pary (i,j) obiektów (i,j=2,...,p, i≠j) są nieskorelowane wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r^2 = \lambda(b+1) . \qquad (4.12)$$

Z definicji 3.2 optymalności sprężynowego układu wagowego i twierdzenia 4.5 wynika następujący wniosek:

Wniosek 4.2. Sprężynowy układ wagowy z macierzą układu X określoną w (4.8) jest układem optymalnym, gdy spełnione są warunki (4.12) i (4.6).

Twierdzenie 4.6. Jeżeli istnieje układ zrównoważony o blokach niekompletnych z parametrami v,b,r,k,λ, taki, że macierz X określona w (4.8) jest macierzą optymalnego sprężynowego układu wagowego, to parametry układu zrównoważonego o blokach niekompletnych spełniają zależności

$$\begin{aligned} v &= b = 4\lambda - 1 \\ r &= k = 2\lambda \ . \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Dowod. Z warunków (4.12) i (4.6) wynika, że $r = 2\lambda$ i $b = 4\lambda-1$. Korzystając z równości $vr = bk$ i $\lambda(v-1) = r(k-1)$ uzyskujemy $v=b$ i $k=r$.

Parametry komplementarnych układów do symetrycznych układów zrównoważonych o blokach niekompletnych opisanych w twierdzeniu 4.3 są postaci $v_1= b_1= 4t+3$, $r_1= k_1= 2(t+1)$, $\lambda_1= t+1$, a opisanych w twierdzeniu 4.4 wyrażają się następująco $v_1^* = b_1^* = 4k^2-1$, $r_1^* = k_1^* = 2k^2$, $\lambda_1^* = k^2$. Parametry te spełniają warunki (4.13), a więc macierze incydencji tych układów mogą stanowić podstawę konstrukcji optymalnego sprężynowego układu wagowego z macierzą X postaci (4.8).

5. UKŁAD OBIEKTÓW

W celu porównania v odmian pewnej rośliny na tle trawy, gdy nie występują efekty konkurencji przeprowadza się doświadczenie z mieszankami, które są obiektami w układzie bloków kompletnych. Powstaje pytanie jak określić skład mieszanki. Czy jako mieszanki traktować poszczególne odmiany rośliny łącznie z trawą, czy też przyjąć różne kombinacje odmian łącznie z trawą. Dotychczas, w praktyce najczęściej określa się mieszanki pierwszym z wyżej podanych sposobów. Okazuje się, że biorąc jako obiekty różne kombinacje odmian i trawy można dokonać estymacji efektów tych odmian z mniejszą wariancją.

Dowolne kombinacje odmian i trawy mogą określać mieszanki (obiekty w układzie bloków kompletnych). W niniejszej pracy proponuje się taki wybór składu mieszanek, który zapewnia estymację efektów odmian z minimalną wariancją. Należy tu jednak zaznaczyć, że taka estymacja nie jest możliwa dla każdej liczby v odmian.

Rozważmy zatem tworzenie mieszanek oparte na macierzy X określonej w (4.1). Macierz ta ma (b+1) wierszy i (v+1) kolumn, a jej elementami są zera i jedynki. Pierwszą kolumnę tej macierzy identyfikuje się z trawą, a pozostałe kolumny z odmianami. Wiersze tej macierzy odpowiadają obiektom w układzie bloków kompletnych. Wszystkie elementy pierwszej kolumny są równe jedności. Oznacza to, że w skład każdej mieszanki wchodzi trawa. Oprócz trawy, każda mieszanka zawiera określone odmiany, które wybieramy w następujący sposób: Jeżeli element i-tego wiersza (i=1,...,b+1) macierzy X i kolumny odpowiadającej j-tej odmianie (j=1,...,v) jest równy 1, to w skład i-tej mieszanki (obiektu) wchodzi j-ta odmiana; 0 na tej pozycji wskazuje, że odpowiednia odmiana nie jest zawarta w i-tej mieszance (obiekcie). Zgodnie z metodą definiowania składu mieszanek w oparciu o macierz X określoną w (4.1) w skład np. pierwszej mieszanki wchodzi trawa i wszystkie odmiany.

W przypadku, gdy liczba porównywanych odmian $v = 4t+3$, to doświadczenie założone w układzie bloków kompletnych z $4(t+1)$ mieszankami (obiektami) określonymi za pomocą macierzy X, którą opisano w (4.1) pozwala na optymalną estymację efektów tych odmian.

Zauważmy, że w analogiczny sposób można definiować obiekty w układzie bloków kompletnych za pomocą macierzy X, którą określono w (4.8). W tym przypadku w skład pierwszego obiektu wchodzi tylko trawa. Jeżeli $v = 4t-1$, to doświadczenie o blokach kompletnych z $4t$ obiektami prowadzi do estymacji efektów odmian z minimalną wariancją.

LITERATURA

Federer W.T. (1959). Treatment design and the interpretation of experimental results. *Biometrics*.15, 153.

Federer W.T., Hedayat A., Lowe C.C., Raghavarao D. (1976). Application of statistical design theory to crop estimation with special reference to legumes and mixtures of cultivars. *Agronomy Journal*, 914-919.

Moriguti S. (1954). Optimality of orthogonal designs. *Rep. Stat. Appl. Res.* 3, 1-24.

Raghavarao D. (1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Designs of Experiments*. John Wiley Inc., New York.

Yates F. (1933). The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete. *Emp. J. Exp. Agric.* 1, 129.

Praca wpłynęła 27 października 1986 :
w wersji ostatecznej 17 listopada 1987